МЕТОДИКА ПОВЫШЕНИЯ СКОРОСТИ И ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ МЕЛЛИНА–БАРНЕСА ПУТЕМ АППРОКСИМАЦИИ КОНТУРА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

И. А. Жевняк

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель О. А. Кравченко

Интеграл Меллина–Барнеса или интеграл Барнса (Barnes integral) в математике – контурный интеграл от функции, содержащей произведение гамма-функций.

Интегралы такого типа тесно связаны с обобщенными гипергеометрическими функциями. Они были введены английским математиком Эрнестом Уильямом Барнсом (Ernest William Barnes, 1874–1953). Похожие интегралы рассматривались финским математиком Ялмаром Меллином (Hjalmar Mellin, 1854–1933), в частности, в связи с обратным преобразованием Меллина.

Путь интегрирования обычно проходит вдоль мнимой оси комплексной переменной интегрирования s (от $-i\infty$ до $+i\infty$), но при этом может деформироваться, чтобы отделить полюса гамма-функций типа $\Gamma(a_i + s)$ (которые должны оставаться слева) от полюсов гамма-функций типа $\Gamma(b_i - s)$ (которые должны оставаться справа).

Цель работы – разработка эффективных методов вычисления интегралов типа Меллина–Барнеса (М–Б) на основе различных аппроксимаций контура стационарной фазы и обобщение на многомерный случай. Проведение тестирования и апробация метода на интегралах, возникающих в современной теоретической физике при рассмотрении диаграмм Фейнмана в квантовой электродинамике и квантовой хромодинамике при учете конечной массы частиц.

На первом этапе предполагается изучение применения метода седловой точки для вычисления одномерных интегралов М–Б, используя выражение (1) из работы [1]:

$$\frac{1}{(1+X)^{v}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds (X)^{-S}\,\frac{\Gamma(s)\Gamma(\nu - s)}{\Gamma(v)}. \tag{1}$$

На втором – построение и применение асимптотических контуров стационарной фазы и оценка точности интегрирования по этим контурам на примере интеграла (1).

Третьим этапом будет рассмотрение интегралов с расходящимся рядом теории возмущений вида (2) [2]:

$$Z(0) = \frac{1}{2i\pi\sqrt{\pi}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\lambda^{-S}\,\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2} - 2s\right)}{(3!)^{-S}}. \tag{2}$$

Четвертый этап – рассмотрение двухмерных интегралов М–Б на основе контура седловой точки. Изучение контура асимптотического контура стационарной фазы для одной и двух переменных двухкратного интеграла из формулы вида (3) [3]:

$$\int_0^\infty \frac{du_1 du_2}{\sqrt{u_1 u_2}} e^{-u1-u2} h(u_1, u_2) \cong \sum\nolimits_{j1,j2=1}^{n} w_{j1} w_{j2} h\left(u_{j1}^0, u_{j2}^0\right) \cong$$

$$\sum\nolimits_{j1,j2=0}^{n} w_{j1} w_{j2} h\left(u_{j1}^0, u_{j2}^0\right);$$

$$n_{j1}^0 + a_{j2}^0 \le n_1^0 + a_N^0. \tag{3}$$

Значение интегралов М–Б для теоретической физики и квантовой теории поля трудно переоценить. Они интенсивно используются для численной проверки аналитических результатов, включая двухпетлевое массивное Bhabha рассеяние в КЭД, трехпетлевые безмассовые форм-факторы и статические потенциалы в массивных двухпетлевых КХД форм-факторах, работах по *B*-физике, адронной физике top-кварков. Также интегралы М–Б используются для получения прямых, численных результатов в суперсиммеитричных теориях Янга–Миллса: четырехпетлевые касп-аномальные размерности и двухпетлевые пятиточечные амплитуды, как, например, $N = 6$ теории Чейна–Саймона для 6 и более петель. В последнем случае, например, вычисляются 14-кратные интегралы.

Пионерские работы по применению контуров седловой точки были опубликованы еще в 1997 г. Сравнительно недавно было осознано, что эффективная аппроксимация контура стационарной фазы должна наиболее точно работать в области асимптотически больших z. Такой подход позволяет рассчитывать на значительное увеличение относительной точности интегралов с ростом числа слагаемых в квадратурной формуле, а также на успешное применение этого подхода и в многомерном случае.

Литература

1. Friot, S. Asymptotics of Feynman diagrams and the Melin-Barnes representation / S. Friot, D. Greynat, E. de Rafael // Physics Letters. – 2005. – Vol. 628. – P. 73–84.
2. Friot, S. Non-Perturbative Asymptotic Improvement of Perturbation Theory and Mellin-Barnes Representation / S. Friot, D. Greynat // SIGMA. – 2010. – Vol. 79. – P. 1–23.
3. Kosower, D. A. Extracting parton densities from collider data / D. A. Kosower // Nuclear Physics B. – 1998. – Vol. 520. – P. 263–278.